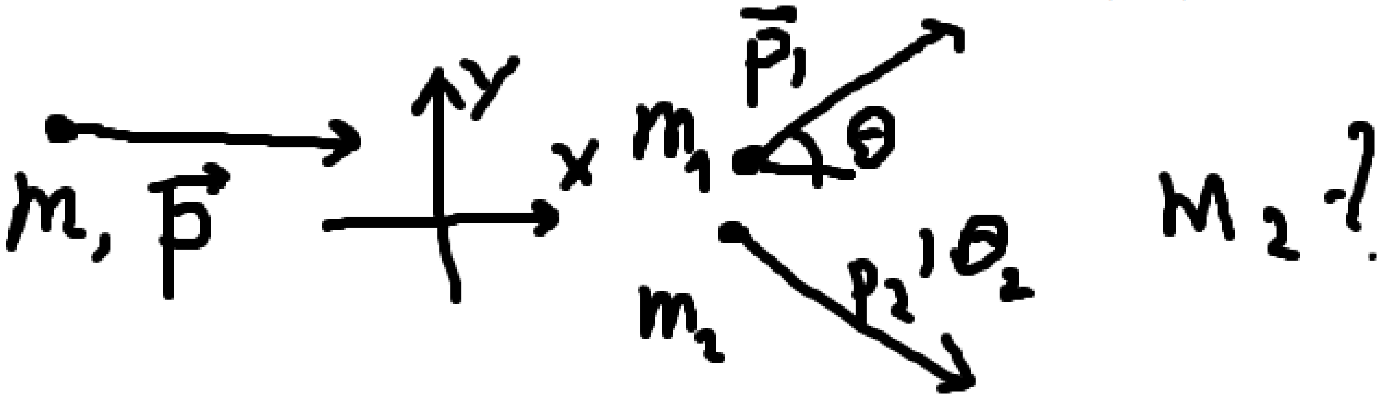
Данная методичка посвящается моему семинаристу по электроду

Семинарист: Кстати, а вы смотрели индийский сериал «Махабхарата 2013»? (пишет название на доске) Там 267 серий. Не смотрите его вместо подстановки к электроду…

Задачи типа «столкновение частиц». Самые изёвые.

2.Частица, имевщая массу покоя m и импульс $\vec{P}$, распадается на две частицы, одна из которых имеет массу m_1 и импульс $\vec{P}_1$, направленный под углом θ к $\vec{P}$. Найти массу покоя второй частицы.



Решение.
Если в условии фигурируют углы - крайне желательно решать в одной СК, записывая ЗСЭ и ЗСИ в ней, а не скакать между разными СК с помощью инвариантов (потому что углы преобразуются в разных СК и всё достаточно противно).

ЗСИ, в проекциях на OX:
$p=p_1\cos\theta+p_2\cos\theta_2$ (1)
OY:
$p_1\sin\theta=p_2\sin\theta_2$ (2)

Теперь надо записать ЗСЭ. Так как в условии массы и импульсы, то хорошо бы вспомнить релятивистские формулы для энергии через импульс и массу.

$$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$$

Записываем равенство энергий системы было и стало:

$$\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{p_1c^2+m_1c^4}+\sqrt{p_2c^2+m_2c^4}$$

Чуть можно сократить:

$$\sqrt{p^2+m^2c^2}=\sqrt{p_1^2+m_1c^2}+\sqrt{p_2^2+m_2c^2} \quad (3)$$

Получаем систему уравнений из (1)-(3) относительно трёх неизвестных: m_2, p_2, θ_2 .
Давайте сначала избавимся от θ_2, поработав с (1) и (2).

Из (1) => $p-p_1\cos\theta=p_2\cos\theta_2$
(2) оставим как есть: $p_1\sin\theta=p_2\sin\theta_2$
Теперь воспользуемся ОТТ и получим
$(p-p_1\cos\theta)^2+(p_1\sin\theta)^2= p_2^2$
$p^2-2pp_1\cos\theta+ p_1^2= p_2^2$
Мы выразили квадрат p_2^2. Теперь его надо подставить в (3) и получить уравнение уже только относительно m_2:

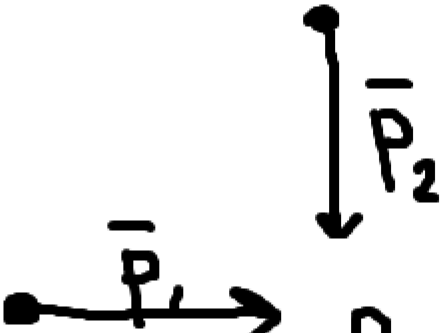
$$\sqrt{p^2+m^2c^2}=\sqrt{p_1^2+m_1c^2}+\sqrt{p^2-2pp_1\cos\theta+p_1^2+m_2c^2}$$

Решение этого уравнения предоставляется читателю.

23.2

2. Две частицы с одинаковыми массами m и одинаковыми энергиями $\mathcal{E}$ летят перпендикулярно друг другу и после взаимодействия образуют единую составную частицу. Чему равна ее масса покоя?

Попробуем решить через инварианты.



$$|\bar{p}_1|=|\bar{p}_2|=p$$

$$p_\Sigma=\sqrt{2}p$$

Найдём 4-энергию системы до удара. С энергетической частью проблем нет – это 2E. Теперь суммарный импульс… Т.к. частицы одинаковы по массе, и по энергии, то импульсы их равны по модулю и перпендикулярны, т.е. суммарный импульс по модулю будет p*корень(2).
А как найти это самое p? Использовать связь между энергией, массой и импульсом

$$E^2-p^2c^2=m^2c^4$$

Выражаем оттуда импульс

$$p^2=\frac{E^2-m^2c^4}{c^2};\ p=\frac{\sqrt{E^2-m^2c^4}}{c}$$

Теперь мы готовы записать 4-энергию системы:

$$\left\{2E;\ \sqrt{2}\sqrt{E^2-m^2c^4}\right\}$$

Считаем ПКН

$$4E^2-2(E^2-m^2c^4)$$

И это должно быть квадратом энергии покоя новой частицы! Потому что в её СК после удара 4-энергия имеет вид {её энергия покоя, ноль-вектор} с ПКН «квадрат энергии покоя».
Поэтому ответ

$$\frac{\sqrt{2E^2+2m^2c^4}}{c^2}$$

Задачи типа «преобразования векторов». Следующие по уровню сложности.

Общее замечание.

Прорешав задачи, могу сказать, что наше всё – это вот эти формулы

$$\mathbf{E}'_{\|}=\mathbf{E}_{\|},\qquad \mathbf{H}'_{\|}=\mathbf{H}_{\|},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp}=\frac{\mathbf{E}_{\perp}+\frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \mathbf{H}'_{\perp}=\frac{\mathbf{H}_{\perp}-\frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$\mathbf{E}_{\|}=\mathbf{E}'_{\|},\qquad \mathbf{H}_{\|}=\mathbf{H}'_{\|},$$

$$\mathbf{E}_{\perp}=\frac{\mathbf{E}'_{\perp}-\frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}']}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \mathbf{H}_{\perp}=\frac{\mathbf{H}'_{\perp}+\frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}']}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Их надо обязательно распечатать/выписать себе на руку... ну вы поняли.
Можно и в таком виде:

$$E'_x = E_x, \qquad H'_x = H_x,$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

8.1

1.В лабораторной системе отсчета угол между напряженностями полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ равен 90° и $|\vec{E}| > |\vec{H}|$. Найти систему отсчета (т.е. указать величину и направление ее относительной скорости), в которой $\vec{H}' = 0$.

Сразу ответ на вопрос, для чему нужно условие превосходства |E| над |H|. Это условие существование искомой СК. Дело в том, что величина H^2-E^2 является инвариантом. Если бы |H|>|E|, то H^2-E^2>0. И в новой СК эта величина должна быть такой же, в т.ч. положительной. Только вот там H^2=0, E^2>=0. Шансов на положительность нет.
Поэтому занулить переходом в новую СК можно только меньшую по модулю в старой СК из напряжённостей.

Как такое решать? Достаём формулы новых компонент через старые

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{H}'_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Нам чё нужно? Аш штрих ноль. Т.е. нам достаточно всего лишь

$$\begin{cases} H_{\parallel} = \bar{0} \\ H_{\perp} - [\bar{\beta} \times E] = \bar{0} \end{cases}$$

Пусть вдоль H будет ось x, а вдоль E – ось y. Тогда β_x=0, чтобы H-параллельное занулилось.
А вот β_y и β_z нам нужно подогнать так, чтобы выполнялось второе уравнение.
Т.к. E направлена вдоль оси y, то из двух проекций беты (β_y и β_z) вклад в векторное произведение внесёт только β_z. Это будет $\beta_z E_y$ (а других проекций у электрической напряжённости и нет) и это всё направлено вдоль оси x.
Получаем уравнение H-β_zE=0.

Ну и получаем второе условие β_z=H/E. Меньше единицы, как и положено (как раз условие существования).
Итак: β_x=0, β_z=H/E, β_y может быть любым.

3.В лабораторной системе отсчета угол между напряженностями полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ равен 90° и вектор $\vec{E}$ по модулю вдвое превышает вектор $\vec{H}$. Найти систему отсчета (т.е. указать величину и направление ее относительной скорости), в которой вектор $\vec{E}$ превышает вектор $\vec{H}$ по модулю вчетверо.

И вновь условие про «вдвое превышает в исходной СК» лишь гарантирует существование.

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$E'^2_{\perp} + E'^2_{\parallel} = 16(H'^2_{\perp} + H'^2_{\parallel})$$

$$\mathbf{E}^2_{\parallel} + \left(\frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = 16\left(\mathbf{H}^2_{\parallel} + \left(\frac{\mathbf{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\right)$$

Выглядит страшно. Мы, конечно, сейчас направим ось x вдоль **E**, а ось y вдоль **H**, но сильно легче не станет.
Но заметим, что у нас три степени свободы (β_x, β_y , β_z), а уравнение по сути одно и скалярное. Так что мы можем достаточно волюнтаристски отнестись к выбору новой СК. В частности, рассмотрим случай, когда из трёх компонент беты не занулится лишь одна. Причём какая – это мы тоже можем волюнтаристски определить. Можем сказать «рассматриваем лишь СК, движущиеся вдоль оси x (параллельно **E**)», или «вдоль оси y (параллельно **H**)», или «вдоль оси z, перпендикулярно обоим векторам).
Я зануляю β_x, β_y , оставив только β_z. Вот так мне захотелось и так будет проще.
В этом случае занулятся обе продольные компоненты, и

$$\left(\frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = 16\left(\left(\frac{\mathbf{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\right)$$

Можем извлечь из обеих частей квадратный корень

$$\frac{\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}} = 4\left(\frac{\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\,\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

И сократить на знаменатель

$$\left|\bar{\mathbf{E}}_\perp + [\bar{\beta}\times\bar{\mathbf{H}}]\right| = 4\left|\bar{\mathbf{H}}_\perp - [\bar{\beta}\times\bar{\mathbf{E}}]\right|$$

Давайте соображать насчёт левой части. Е-перпендикулярное – это E_x (мы x направили вдоль E). [**β**x**H**] – **β** у нас вдоль z, **H** – вдоль y, а их векторное произведение будет торчать вдоль оси x (надо только сообразить, в какую сторону.

Вспоминаем, что

$[e_x\, e_y]=e_z$, делаем циклическую перестановку

$[e_y\, e_z]=e_x$

То если игрековый вектор на зетовый – то с плюсом. А у нас наоборот - значит, с минусом.

Итого в левой части вектор вдоль оси x с модулем E-βH.

В правой части аналогично будет вектор вдоль оси y с модулем то ли H-βE, то ли H+βE.

Когда мы считали векторное произведение, мы умножали вектор вдоль z на вдоль x.

$[e_x\, e_y]=e_z$

$[e_y\, e_z]=e_x$

$[e_z\, e_x]=e_y$

Здесь будет с плюсом.

E-βH=4(H-βE)

E-4H=β(-4E+H)

4H-E=β(4E-H)

4H-2H= β(8H-H)

β=(E-4H)/(4E+H)

Надо проверить, что это по модулю меньше 1. Вот тут и пригождается часть условия про то, что E=2H.

β=(2H-4H)/(8H+H)=2/9. Всё, <1, отбой, ура, победа!

Задачи типа «тензоры». Самые сложные.

22.1

1.Дан абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга $F_{ikl} = -F_{kil} = -F_{ilk}$. Его ненулевые компоненты имеют вид: $F_{123} = \Psi$; $F_{012} = -B_z$; $F_{023} = -B_x$; $F_{013} = -B_y$. Найти закон преобразования скалярного поля Ψ и компонент вектора $\vec{B}$ при преобразованиях Лоренца.

Ух ты, тензор аж третьего ранга (я такие называю тринзорами)! В нём аж 4^3=64 компонент, из которых в данной СК 60 оказались нулевыми, а 4 – ненулевыми.
Задача не такая уж и сложная.
Мы знаем закон преобразования двензора

$$F'_{ik} = \sum_{m,n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} F_{nm}$$

По аналогии выпишем закон преобразования тринзора

$$F'_{ijk} = \sum_{l,m,n} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} F_{lmn}$$

У нас не абы какой переход в новую СК, а преобразования Лоренца. Т.е. не надо считать заново 16 производных, они у нас уже подсчитаны. Будем считать, что ось, вдоль которой происходит движение – ось абсцисс, поэтому

А что особенно приятно – нам не нужно вычислять все 64 компонент трёхмерной матрицы в новой СК, а надо вычислить лишь 4 её компоненты. Вычислим, например, [0,1,2]

$$F'[0,1,2] = \sum_{l,m,n} \frac{\partial x^l}{\partial x'^0} \frac{\partial x^m}{\partial x'^1} \frac{\partial x^n}{\partial x'^2} F[l,m,n]$$

Расскрываем сначала суммирование по n:

$$F'[0,1,2] = \sum_{l,m} \frac{\partial x^l}{\partial ct} \frac{\partial x^m}{\partial x} \left[\frac{\partial ct}{\partial y'} F[l,m,0] + \frac{\partial x}{\partial y'} F[l,m,1] + \frac{\partial y}{\partial y'} F[l,m,2] + \frac{\partial z}{\partial y'} F[l,m,3] \right]$$

Из четырёх слагаемых выживет только одно:

$$F'[0,1,2] = \sum_{l,m} \frac{\partial x^l}{\partial ct'} \frac{\partial x^m}{\partial x'} F[l,m,2]$$

Как вы догадываетесь, если мы раскроем суммирование

$$F'[0,1,2] = \sum_l \frac{\partial x^l}{\partial ct'}\left(\frac{\partial ct}{\partial x'}F[l,0,2] + \frac{\partial x}{\partial x'}F[l,1,2] + \frac{\partial y}{\partial x'}F[l,2,2] + \frac{\partial z}{\partial x'}F[l,3,2]\right)$$

И тут не занулится уже два слагаемых.

$$F'[0,1,2] = \sum_l \frac{\partial x^l}{\partial ct'}\left(\frac{\partial ct}{\partial x'}F[l,0,2] + \frac{\partial x}{\partial x'}F[l,1,2]\right)$$

Раскрываем последнее суммирование:

$$F'[0,1,2] = \frac{\partial ct}{\partial ct'}\left(\frac{\partial ct}{\partial x'}F[0,0,2] + \frac{\partial x}{\partial x'}F[0,1,2]\right) + \frac{\partial x}{\partial ct'}\left(\frac{\partial ct}{\partial x'}F[1,0,2] + \frac{\partial x}{\partial x'}F[1,1,2]\right)$$

У нас в итоге в конечной формуле фигурируют всего четыре компоненты исходной трёхмерной матрицы, в старой СК. Уместно вспомнить, что матрица эта «дырявая» - многие её элементы нули.

$$\underbrace{F'[0,1,2]}_{=\,-B'_z} = \frac{\partial ct}{\partial ct'}\frac{\partial x}{\partial x'}\underbrace{F[0,1,2]}_{=\,-B_z}$$

Обе производные – это лямбда. Вот и мы получили закон преобразования одной из компонент. Мы сделали 25% задачи.

Если мы и для каждой из оставшихся будем заново раскрывать все три суммирования, мы чокнемся. Давайте как-то по аналогии.

Компонента [0,1,3] новой матрицы считается ну точно так же, просто надо двойку заменить на тройку:

$$\underbrace{F'[0,1,3]}_{=\,-B'_z} = \frac{\partial ct}{\partial ct'}\frac{\partial x}{\partial x'}\underbrace{F[0,1,3]}_{=\,-B_z}$$

Теперь давайте считать [0,2,3] и [1,2,3]. Вновь обратимся к формуле

$$F'_{ijk} = \sum_{l,m,n} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} F_{lmn}$$

Если считать, что j=2 и k=3, то из четырёх производных ненулевой будет только одна. Так что суммирование станет по одной переменной. Получим

$$F[i23] = \sum_l \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \cdot F[l23]$$

Где i – ноль или один (в зависимости от того, какую компоненту мы хотим подсчитать).

$$F[023] = \frac{\partial ct}{\partial ct'} F[023] + \frac{\partial x}{\partial ct} F[123]$$

$$F[123] = \frac{\partial ct}{\partial x'} F[023] + \frac{\partial x}{\partial x'} \cdot F[123]$$

1.Ненулевые компоненты тензора T_{ik} в лабораторной системе координат имеют вид: $T_{00} = T_{11} = T_{01} = T_{10} = Q$. Записать в явном виде формулы для преобразования компонент этого тензора при повороте декартовой системы координат вокруг оси Z на постоянный угол θ.

$$\begin{pmatrix} Q & Q & 0 & 0 \\ Q & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - исходная матрица.

Я перепутал тету и фи, впрочем, вы бы даже не обратили внимания, если бы это не сделал я.

Формула для перехода в любые, сколь угодно упоротые СК

$$F'_{ik} = \sum_{m,n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} F_{nm}$$

1) Вырази старые координаты через новые!

$z = z', \ ct = ct'$

$x = \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y'; \ y' = \cos\varphi\, y' - x' \sin\varphi$

Стоит проделать проверку: при фи=0 должно выполняться $x' = x, \ y' = y$.

В данном случае так и есть.

2) Подсчитай 16 производных!

К счастью, ненулевых конкретно в нашей задаче будет всего 6:

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial y'} = \cos\varphi; \ \frac{\partial x}{\partial y'} = \sin\varphi; \ \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial ct'}{\partial ct} = 1$$

3) Глядя на внешний вид начальной матрицы, мы видим, что если m или n >1, то соответствующие компоненты F[n,m] будут 0. Поэтому мы можем сделать суммирование по m и n от 0 до 1, а не от 0 до 3.
Суммирование по m и n от 0 до 1 – это 4 слагаемых. Распишем их явно:

$$3)\ F'_{[i,k]} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} \frac{\partial x^0}{\partial x'^k} F[0,0] + \frac{\partial x^0 \partial x^1}{\partial x'^i \partial x'^k} F[0,1] +$$

$$+ \frac{\partial x^1}{\partial x'^i} \frac{\partial x^0}{\partial x'^k} F[1,0] + \frac{\partial x^1 \partial x^1}{\partial x'^i \partial x'^k} F[1,1]$$

Что можно ещё немного упростить

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^i} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^i}\right)\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^k}\right) Q$$

Ну я так понимаю, это то, о чём нас просили – вот максимально упрощённая формула. Её дальнейшие упрощения невозможны, пока мы не определимся, какую именно из 16 компонент конечной матрицы мы хотим подсчитать.